数理解析研究所講究録
54巻 1968年 72-96

横沼健雄氏の講演
(R. Ree の論文の紹介)

東大 理　岩堀 長慶

§1. あらまし

横沼氏は明快な話をするので，我々のセミナーでは，読み辛い論文紹介などの割り当てが多い．今度のシンポジウムでは，

R. Ree : *Classification of involutions and centralizers of involutions in certain simple groups*, Proc. Int. Conf. Theory of Groups, Austral. Nat. Univ., August 1965, pp. 281-301.

の内容紹介をされたが，うまいアイデアで主要点を別のアプローチから説明している．そのため原著よりは大分見易く，かつ見通しのよいものになった所が多い．(序に，Ree の計算の間違いが一つ訂正されたのも，その判り易い方法の御利益といえよう．)

内容を簡単にいえば，複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ と，有限体 $\mathbb{F}_q$

に附随する Chevalley 群を G とし，次の問題を考える（ただし q は奇数）：

(i)　G の involution の共役類の決定，

(ii)　G の各 involution σ に対し，σ の G での中心化群 $C_G(\sigma)$ の構造.

これは，$C_G(\sigma)$ の構造を知って，単純群 G を決定するという，最近成果の出始めた分類問題（例えば近藤氏の講演参照）から生じた問題である。Ree の原著では，$\mathfrak{g}$ が exceptional type (G_2), (F_4), (E_6), (E_7), (E_8) の時だけ考えている. また，Chevalley の単純群 G' に対しては，Ree の結果は不十分である. この点は横沼氏の講演でも別に進歩はなかった. なお，$\mathfrak{g}$ が classical type なら Wall の論文 (Austral. J., vol. 2, 1962) により G の共役類が決定され，(i), (ii) は解決済と見做せることに注意しておく.

§2. Chevalley 群の想起.

この種のシンポジウムで Chevalley 群の話は何度も出たから，定義を繰返す必要もないであろうが，記号その他がどうしても必要になるから，念の為に Chevalley 群の概念を想起しておく。まず

$\mathfrak{g}$ = 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の単純リー環

7.

$\mathfrak{h}$ = $\mathfrak{g}$の一つの Cartan 部分環

Δ = $\mathfrak{g}$の$\mathfrak{h}$に関するルート系

とし，Δ中に一つの辞引式順序を固定する．それに関して，

Δ^+ = Δ中の正のルートの全体

Δ^- = Δ中の負のルートの全体

$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ = 単純ルート系

とする。また

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

を，$\mathfrak{g}$の$\mathfrak{h}$に関する固有空間分解とする．さてこのとき，$\mathfrak{h}$の$\mathbb{C}$上の基底$\{H_1, \cdots, H_l\}$と，$\mathfrak{g}_\alpha$の$\mathbb{C}$上の基底X_α $(\alpha\in\Delta)$が存在して，次の性質をもつ：

各ルートαに対して，$\mathfrak{g}$の自己同型$\exp(t\,\mathrm{ad}\,X_\alpha)$の，$\mathfrak{g}$の基底$\{H_i\ (1\leq i\leq l),\ X_\alpha\ (\alpha\in\Delta)\}$に関する行列のどの成分も，$t$の整係数多項式となる．

そのためには，$\{H_i, X_\alpha\}$が$\mathfrak{g}$の Chevalley base であればよい（[1] 参照）．

さて，$\{H_i, X_\alpha\}$を$\mathfrak{g}$の Chevalley base とし，kを任意の可換体とし，

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} = \sum_i \mathbb{Z} H_i + \sum_\alpha \mathbb{Z} X_\alpha$$

$$\mathfrak{g}_k = k \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$$

とおく．$\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$，$\mathfrak{g}_k$ はそれぞれ $\mathbb{Z}$，k 上のリー環である。上述より，各 $t_0 \in k$ に対して，$\exp(t \operatorname{ad} X_\alpha)$ の行列成分の変数 t を，t_0 でおきかえたものは，$\mathfrak{g}_k$ の自己同型である．これを $x_\alpha(t_0)$ と書く．

$\mathfrak{g}_k$ の自己同型群 $Aut(\mathfrak{g}_k)$ の部分群 $\mathfrak{X}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$，$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ を次の如く定義する：

$$\mathfrak{X}_\alpha = \{ x_\alpha(t) \ ; \ t \in k \},$$

$$\mathfrak{U} = \langle \mathfrak{X}_\alpha \ ; \ \alpha \in \Delta^+ \rangle,$$

$$\mathfrak{V} = \langle \mathfrak{X}_\alpha \ ; \ \alpha \in \Delta^- \rangle.$$

そして，$Aut(\mathfrak{g}_k)$ の部分群 G' を

$$G' = \langle \mathfrak{V}, \mathfrak{U} \rangle$$

で定義する．

次に，ルート系 Δ の張る加群（$\mathfrak{h}$ の双対ベクトル空間 $\mathfrak{h}^*$ の部分加群）を P_0 とし，P_0 から k の乗法群 k^* への準同型 χ に対して，$\mathfrak{g}_k \longrightarrow \mathfrak{g}_k$ なる写像 $h(\chi)$ を

$$\begin{cases} h(\chi) H_i = H_i & (i = 1, \cdots, \ell) \\ h(\chi) X_\alpha = \chi(\alpha) X_\alpha & (\alpha \in \Delta) \end{cases}$$

で定義すると，$h(\chi) \in Aut(\mathfrak{g}_k)$ である。

$$\mathfrak{h} = \{ h(\chi) \; ; \; \chi \in Hom(P_0, k^*) \}$$

は $Aut(\mathfrak{g}_k)$ の部分群で，写像 $\chi \longrightarrow h(\chi)$ は，

$$Hom(P_0, k^*) \longrightarrow \mathfrak{h}$$

なる bijective isomorphism である．Chevalley 群 G は

$$G = \langle G', \mathfrak{h} \rangle = \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{X}_\alpha \ (\alpha \in \Delta) \rangle$$

で定義される．（詳しくは，G を随伴型の Chevalley 群という。G' は G の不変部分群で，一般には $G' = [G, G]$，かつ G' は単純群になる。例外は4組の $(\mathfrak{g}, k) =$

$$((A_1), \mathbb{F}_2), \ ((A_1), \mathbb{F}_3), \ ((B_2), \mathbb{F}_2), \ ((G_2), \mathbb{F}_2)$$

に限る．）

次に，各 $\alpha \in \Delta$ に対し，$SL(2, k) \longrightarrow G'$ なる準同型で，

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto x_\alpha(t) \\ & (t \in k) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \longmapsto x_{-\alpha}(t) \end{cases}$$

なるものが一意的に存在する．これを ϕ_α と書く．そして，G' の元 ω_α を

$$\omega_\alpha = \phi_\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

で定義する．そして，G の部分群 $\mathfrak{W}$ を

$$\mathfrak{W} = \langle \mathfrak{h}, \omega_\alpha \ (\alpha \in \Delta) \rangle$$

で定義すると, $\mathfrak{N} \triangleright \mathfrak{H}$ である. さて, W を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{f}$ に関する Weyl 群とし, $\alpha \in \Delta$ の定める鏡映を $w_\alpha \in W$ とすると, exact sequence

$$1 \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{N} \xrightarrow{\zeta} W \longrightarrow 1$$

$$\zeta(\omega_\alpha) = w_\alpha \quad (\alpha \in \Delta)$$

が成立する. いま, $W \longrightarrow \mathfrak{N}$ なる写像 s で,

$$\zeta \circ s = id_W$$

なるものを一つ固定する. すると G は, 次の Bruhat 分解をもつ:

(1°) $B = \mathfrak{H}\mathfrak{U}$ は, G の部分群で,

$$G = \bigcup_{w \in W} B\, s(w)\, B \qquad (\text{disjoint union})$$

と分解される.

(2°) 各 $w \in W$ に対して,

$$\mathfrak{U}_w = \langle \mathfrak{X}_\alpha\ ;\ \alpha \in \Delta^+,\ w(\alpha) \in \Delta^- \rangle$$

とおくと, 写像

$$\begin{cases} \mathfrak{U} \times \mathfrak{H} \times \mathfrak{U}_w \longrightarrow B\, s(w)\, B \\ (u,\ h,\ u') \longmapsto u\, h\, s(w)\, u' \end{cases}$$

は bijection である.

§3. 代数群の理論から（Lang の定理）

$\mathfrak{g}$, k などは §2 と同じとする。§2 で G, $\mathfrak{h}$, … と書いた群を，k を明示するときは，G_k, $\mathfrak{h}_k$, … と書く。

いま，Ω を k を含む代数的閉体とすると，

(1°) (Ono) G_Ω, $\mathfrak{h}_\Omega$ は素体上定義された連結代数群であって，G_k, $\mathfrak{h}_k$ は，その k 上の rational point のなす群である。

(2°) $\mathfrak{h}_\Omega$ は G_Ω の maximal torus；G_Ω は半単純代数群；そして，G_Ω の semi-simple（＝対角化可能）な元は，必ず $\mathfrak{h}_\Omega$ の元に共役である。

* * *

以下，k を q 個の元よりなる有限体 $\mathbb{F}_q$ とし，しかも q は奇数とする。

(3°) G_k 中の involution は，$\mathfrak{h}_k$ 中の involution に G_Ω 中で共役である。

実際，体の標数 $\neq 2$ 故，involution は semi-simple。さて，$\mathfrak{h}_\Omega$ 中の involution は k 上 rational 故，$\mathfrak{h}$ に属す。

(4°) (Lang) Γ_Ω を，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上で定義された連結代数群とする。Ω の自己同型 $\xi \longmapsto \xi^q$ のひきおこす Γ_Ω の自己同型を $x \longmapsto x^{(q)}$ とすると，各 $y \in \Gamma_\Omega$ に対して $z \in \Gamma_\Omega$

が存在して，$y = z^{-1} z^{(q)}$ となる．

この補題を用いると，

(5°) (Lang) G_k の元 x と y とが G_Ω 中で共役で，かつ，$C_{G_\Omega}(x)$ が連結代数群ならば，x と y とは G_k 中で共役である。

証明．$\Gamma_\Omega = C_{G_\Omega}(x)$ に (4°) を用いる．いま $axa^{-1} = y$ なる $a \in G_\Omega$ をとれば $a^{(q)} x a^{(q)-1} = y$ だから，$a^{-1} a^{(q)} \in \Gamma_\Omega$．よって，$z \in \Gamma_\Omega$ が存在して，$a^{-1} a^{(q)} = z^{-1} z^{(q)}$ となる．$az^{-1} = b$ とおくと，$bxb^{-1} = y$ を満たし，しかも $b = b^{(q)}$。よって，$b \in G_k$ である。

§4. $\mathfrak{h}$ の元の centralizer

(1°) $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$ とする．h_1 と h_2 が G 中で共役ならば，$w h_1 w^{-1} = h_2$ なる $w \in \mathfrak{W}$ がある。

証明．$g h_1 g^{-1} = h_2$ なる $g \in G$ をとり，Bruhat 分解 $g = uhs(w)u'$ を考える．$gh_1 = h_2 g$ に代入して，

$$uhs(w)u'h_1 = h_2 uhs(w)u'$$

となる。$h_1^{-1} u' h_1 = u'' \in \mathfrak{U}_w$，$h_2 u h_2^{-1} = u_1 \in \mathfrak{U}$ とおくと

$$uhs(w)h_1u'' = u_1 h_2 hs(w)u'.$$

すると表示の一意性より

$$u = u_1, \quad u'' = u', \quad hs(w)h_1 = h_2 hs(w)$$

$$\therefore\ u \in C_G(h_2),\quad u' \in C_G(h_1),\quad s(w)h_1 s(w)^{-1} = h_2.$$

(2°) exact sequence $1 \longrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{N} \longrightarrow W \longrightarrow 1$ と，$\mathfrak{h}$ が可換群なることより，W が $\mathfrak{h}$ に作用する：

$$w(h) = s(w)\,h\,s(w)^{-1}.$$

一方，W は Δ を保つから，P_0 に作用し，従って，W は $\mathrm{Hom}(P_0, k^*)$ にも作用する：

$$\langle w(\chi), \gamma\rangle = \langle \chi, w^{-1}(\gamma)\rangle \qquad (\gamma \in P_0).$$

すると，同型対応 $\chi \longmapsto h(\chi)$ は，この W-action と compatible であることが容易にわかる。すなわち

$$w(h(\chi)) = h(w(\chi)) \qquad (\chi \in \mathrm{Hom}(P_0, k^*)).$$

(3°) $\chi \in \mathrm{Hom}(P_0, k^*)$ を与えると，χ の W 中の isotropy group W_χ が定まる：

$$W_\chi = \{\, w \in W;\ \ w(\chi) = \chi \,\}.$$

次に

$$\Delta_\chi = \{\, \alpha \in \Delta;\ \ \chi(\alpha) = 1 \,\}$$

とおく。すると，$(W_\chi)_0 \subset W_\chi$ である。

証明. $\alpha \in \Delta_\chi$ として，$w_\alpha \in W_\chi$ をいえばよい。いま $w_\alpha(\chi) = \chi'$ とおくと，各 $\beta \in P_0$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \chi', \beta\rangle &= \langle \chi, w_\alpha(\beta)\rangle = \langle \chi, \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\rangle \\ &= \langle \chi, \beta\rangle\end{aligned}$$

すなわち，$\chi = \chi'$，$w_\alpha \in W_\chi$．

(4°) $\chi \in \mathrm{Hom}(P_0, k^*)$ とすると，

$$C_{G_\Omega}(h(\chi)) = \bigcup_{w \in W_\chi} \mathfrak{U}'_\Omega \mathfrak{H}_\Omega s(w) (\mathfrak{U}'_\Omega \cap (\mathfrak{U}_w)_\Omega)$$

$$C_G(h(\chi)) = \bigcup_{w \in W_\chi} \mathfrak{U}' \mathfrak{H} s(w) (\mathfrak{U}' \cap \mathfrak{U}_w)$$

ただし

$$\mathfrak{U}' = \langle \mathfrak{X}_\alpha ; \alpha \in \Delta_\chi \cap \Delta^+ \rangle .$$

証明．Bruhat 分解の一意性から，

$$uhs(w)u' \text{ が } h(\chi) \text{ と可換} \iff$$
$$u, u', s(w) \text{ が } h(\chi) \text{ と可換}$$

を得る．また，一般に $u^* = \prod_i x_{\beta_i}(t_i)$ $(\beta_i \in \Delta^+)$，$\beta_1 < \beta_2 < \cdots$，ならば，

$$u^* \in C_G(h(\chi)) \iff \forall x_{\beta_i}(t_i) \in C_G(h(\chi))$$
$$\iff \chi(\beta_i) t_i = t_i \quad (\forall i)$$

すなわち，$t_i \neq 0$ なら，$\iff \chi(\beta_i) = 0 \quad (\forall i)$

$$\iff \beta_i \in \Delta_\chi \iff u^* \in \mathfrak{U}'$$

である．次に，$s(w) h(\chi) s(w)^{-1} = h(w(\chi))$ だから，

$$s(w) \in C_G(h(\chi)) \iff w \in W_\chi$$

(5°) $W_\chi = (W_\chi)_0$ ならば，$C_{G_\Omega}(h(\chi))$ は連結代数群である．（実は逆も成り立つが，記述の都合上その証明および精密化

を §7 に述べる。

証明. $\omega_\alpha = x_\alpha(1)x_{-\alpha}(-1)x_\alpha(1)$ であるから, $W_\chi = (W_\chi)_0$ ならば, $C_{G_\Omega}(h(\chi))$ は, (4°) により, $(\mathfrak{X}_\alpha)_\Omega$ $(\alpha \in \Delta_\chi)$ と $\mathfrak{H}_\Omega$ とから生成される. $(\mathfrak{X}_\alpha)_\Omega$, $\mathfrak{H}_\Omega$ はどれも連結であるから, $C_{G_\Omega}(h(\chi))$ も連結である.

§5. W-orbits in $\mathfrak{h}$.

(1°) $\mathfrak{h}$ の双対ベクトル空间 $\mathfrak{h}^*$ 中で, Δ の張る実ベクトル空间を E とかく。Killing 形式を $\mathfrak{h}^*$ に導入したものを (x, y) $(x \in \mathfrak{h}^*, y \in \mathfrak{h}^*)$ とかくと, それは E 中で正定値の内積である。$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ の dual base $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l\}$ を

$$(\alpha_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$$

で定める.

(2°) $D = \{\lambda \in E;\ (\lambda, \alpha) \in \mathbb{Z}\ (\forall \alpha \in \Delta)\}$ とおくと, D は E 中の一つの格子群 (lattice) をなす. 次に有限体 $k = \mathbb{F}_q$ の乗法群 k^* は巡回群であるが, k^* の生成元 σ を一つ固定する。そして, 準同型

$$\begin{cases} D \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_0, k^*) \\ \lambda \longmapsto \chi_\lambda \end{cases}$$

を次のように定義する:

$$\chi_\lambda(\gamma) = \sigma^{(\lambda,\gamma)} .$$

これは surjective, かつ kernel は $(q-1)D$ である。

しかも, exact sequence

$$1 \longrightarrow (q-1)D \longrightarrow D \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_0, k^*) \longrightarrow 1$$

中の準同型は, 凡て W の作用と compatible である。

証明. 容易.

(3°) $\lambda, \mu \in D$ とすると,

$w(\chi_\lambda) = \chi_\mu$ なる $w \in W$ が存在する $\Longleftrightarrow$

$w \in W$, $\delta \in D$ が存在して, $\mu = w(\lambda) + (q-1)\delta$.

証明. 容易.

(4°) $\delta \in D$ に対し, $E \longrightarrow E$ なる translation $T(\delta)$ を $T(\delta)x = x + \delta$ で定義する. 自然数 n に対して,

$$T_{nD} = \{T(\delta)\ ;\ \delta \in nD\} \quad (\cong nD)$$

$$\mathfrak{T}^{(n)} = \langle W, T_{nD} \rangle = T_{nD} \cdot W \text{ (半直積)}$$

$$(w T(\delta) w^{-1} = T(w(\delta)) \text{ に注意})$$

とおく. また,

$$P = \left\{\lambda \in E\ ;\ \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z} \quad (\forall \alpha \in \Delta)\right\}$$

$$D' = \{\lambda \in E\ ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z} \quad (\forall \mu \in P)\}$$

8i

とおく。（$\alpha_i^* = \dfrac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i$ とおくと，

$$D' = \sum \mathbb{Z}\alpha_i^*$$

が成り立つ。）　そして

$$\mathfrak{S}^{(n)} = \langle W, T_{nD'} \rangle = T_{nD'} \cdot W \quad (\text{半直積})$$

とおく。（$\mathfrak{S}^{(1)}$ がいわゆる *affine Weyl group* と呼ばれる，無限離散鏡映群である。）

（5°）次の性質がある（[2] 参照）。α_0 を最大ルートとする。

（A）$\mathfrak{T}^{(n)} \triangleright \mathfrak{S}^{(n)}$；　しかも

$$\Omega^{(n)} = \{1\} \cup \{T(n\varepsilon_i) w_{\Pi_i} w_{\Pi} ;\ (\alpha_0, \varepsilon_i) = 1\}$$

は $\mathfrak{T}^{(n)}$ の有限部分群で，$\mathfrak{T}^{(n)} = \Omega^{(n)} \mathfrak{S}^{(n)}$　（半直積）．

（B）超平面 $(\alpha_i, x) = 0$ に関する鏡映を w_i $(i = 1, \cdots, l)$ とし，超平面 $(\alpha_0, x) = n$ に関する鏡映を w_0 とすると

$$\mathfrak{S}^{(n)} = \langle w_0, w_1, \cdots, w_l \rangle .$$

（C）E の変換群 $\mathfrak{S}^{(n)}$ は $\mathfrak{D}^{(n)}$ を基本領域にもつ。ただし，

$$\overline{\mathfrak{D}}^{(n)} = \{x \in E ;\ (\alpha_i, x) \geqq 0 \ \ (1 \leqq i \leqq l),\ (\alpha_0, x) \leqq n\} .$$

すなわち，E の各点 x に対し，x の $\mathfrak{S}^{(n)}$-*orbit* は，$\overline{\mathfrak{D}}^{(n)}$ と

丁度一点で交わる.

(D) $\Omega^{(n)}=\{\tau\in\mathfrak{T}^{(n)};\ \tau(\bar{\mathfrak{D}}^{(n)})=\bar{\mathfrak{D}}^{(n)}\}$ である。従って, $\bar{\mathfrak{D}}^{(n)}/\Omega^{(n)}$ が群 $\mathfrak{T}^{(n)}$ の基本領域になる. すなわち E の各点 x に対し, x の $\mathfrak{T}^{(n)}$-orbit は $\bar{\mathfrak{D}}^{(n)}$ と交わる。また, $\bar{\mathfrak{D}}^{(n)}$ の各点 x, y に対して, x と y との $\mathfrak{T}^{(n)}$-orbit が一致する $\Longleftrightarrow$ x と y との $\Omega^{(n)}$-orbit が一致する.

(以下, 2点 x と y との, 群 Γ の作用下での orbit が一致することを, $x \underset{\Gamma}{\sim} y$ と書く.)

* * *

(6°) $n=q-1$ に対して, (3°) を書き直せば

$$\chi_\lambda \underset{W}{\sim} \chi_\mu \Longleftrightarrow \lambda \underset{\mathfrak{T}^{(q-1)}}{\sim} \mu$$

である. よって, $h(\chi_\lambda)$ の isotropy group を考えるとき, $\lambda\in\bar{\mathfrak{D}}^{(q-1)}$ としてよい.

(7°) $\lambda\in\mathfrak{D}^{(q-1)}$ とし, λ の $\Omega^{(q-1)}$, $\mathfrak{S}^{(q-1)}$, $\mathfrak{T}^{(q-1)}$ での isotropy group を $\Omega^{(q-1)}_\lambda$, $\mathfrak{S}^{(q-1)}_\lambda$, $\mathfrak{T}^{(q-1)}_\lambda$ と書くと,

$$W_{\chi_\lambda} \cong \Omega^{(q-1)}_\lambda\, \mathfrak{S}^{(q-1)}_\lambda$$

しかも $\mathfrak{S}^{(q-1)}_\lambda$ は, 単体 $\bar{\mathfrak{D}}^{(q-1)}$ の壁の中で λ を通るものに関する鏡映から生成される.

証明. $w \in W_{\chi_\lambda} \Longleftrightarrow w(\chi_\lambda) = \chi_\lambda \Longleftrightarrow w(\lambda) - \lambda \in (q-1)D$ $\Longleftrightarrow w(\lambda) = T(\delta)\lambda \ (\exists \delta \in (q-1)D) \Longleftrightarrow T(\delta)^{-1} w \in \mathfrak{T}_\lambda^{(q-1)} \ (\exists \delta \in (q-1)D)$. しかもこの様な $\delta \in (q-1)D$ は，明らかに一意確定する。よって，$w \in W_{\chi_\lambda}$ に $T(\delta)^{-1} w \in \mathfrak{T}_\lambda^{(q-1)}$ を対応させれば，写像 $W_{\chi_\lambda} \longrightarrow \mathfrak{T}_\lambda^{(q-1)}$ を得る。容易に，これは bijective isomorphism であることがわかる： $W_{\chi_\lambda} \cong \mathfrak{T}_\lambda^{(q-1)}$.

さて，$\tau \in \mathfrak{T}_\lambda^{(q-1)}$ を $\tau = \rho\sigma$ ($\rho \in \Omega^{(q-1)}$, $\sigma \in \mathfrak{S}^{(q-1)}$) と書くと，$\tau(\lambda) = \lambda$ より，$\sigma(\lambda) = \rho^{-1}(\lambda) \in \bar{\mathfrak{D}}^{(q-1)}$. よって $\sigma(\lambda) = \lambda$, $\therefore \sigma \in \mathfrak{S}_\lambda^{(q-1)}$. $\therefore \rho \in \Omega_\lambda^{(q-1)}$. よって，

$$\mathfrak{T}_\lambda^{(q-1)} = \Omega_\lambda^{(q-1)} \mathfrak{S}_\lambda^{(q-1)} \quad (\text{半直積})$$

である。$\mathfrak{S}_\lambda^{(q-1)}$ の生成系については周知である。

(8°) 準同型 $\mathfrak{T}^{(q-1)} \xrightarrow{\varphi} W$ を $\varphi(T(\delta)w) = w$ で定義すれば，$(W_{\chi_\lambda})_0 = \varphi(\mathfrak{S}_\lambda^{(q-1)})$. 従って

$$W_{\chi_\lambda} = (W_{\chi_\lambda})_0 \Longleftrightarrow \Omega_\lambda^{(q-1)} = \{1\}$$

証明. $\alpha \in \Delta_{\chi_\lambda}$ とすると，$\chi_\lambda(\alpha) = 1$; $\therefore (q-1) \mid (\lambda, \alpha)$ よって，$\delta = (2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha))\alpha$ とおくと，$\delta = (\lambda,\alpha)\cdot\alpha^* \in (q-1)D'$. そして，$w_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda,\alpha)\alpha^* = \lambda - \delta$ だから，$T(\delta) w_\alpha(\lambda) = \lambda$ $\therefore T(\delta) w_\alpha \in \mathfrak{S}_\lambda^{(q-1)}$, $w_\alpha \in \varphi(\mathfrak{S}_\lambda^{(q-1)})$. よって，$W_{\chi_\lambda} \subset \varphi(\mathfrak{S}_\lambda^{(q-1)})$ を得る.

逆に，$w \in \varphi(\mathfrak{S}_\lambda^{(q-1)})$ とすると，$T(\delta) w \in \mathfrak{S}_\lambda^{(q-1)}$ なる

$\delta \in (q-1)D'$ がある。今

$$T(\delta)w = w_{i_1}\cdots w_{i_p} \quad (0 \leq i_1, \cdots, i_p \leq \ell)$$

と表わす。ただし，各 w_{i_t} に対応する超平面は凡て λ を通るとする：

$$\begin{cases} i_t \neq 0 & \Longrightarrow (\alpha_{i_t}, \lambda) = 0 \\ i_t = 0 & \Longrightarrow (\alpha_{i_t}, \lambda) = q-1 \end{cases}$$

何れにしても $\chi_\lambda(\alpha_{i_t}) = 1$，$\therefore \alpha_{i_t} \in \Delta_{\chi_\lambda}$。よって，

$\varphi(w_{i_1}), \cdots, \varphi(w_{i_p}) \in (W_{\chi_\lambda})_0 \quad \therefore w \in (W_{\chi_\lambda})_0$.

§6. Involutions in $\mathfrak{h}$

(1°) $h(\chi_\lambda)$ $(\lambda \in \bar{\mathcal{D}}^{(q-1)})$ の位数が 2 になる条件は，

$\lambda \notin (q-1)D$，$2\lambda \in (q-1)D$ である。すなわち，

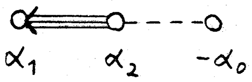
$$2\lambda = (q-1)(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_\ell\varepsilon_\ell)$$

$$\alpha_0 = m_1\alpha_1 + \cdots + m_\ell\alpha_\ell$$

とおくと，

$h(\chi_\lambda)$ $(\lambda \in \bar{\mathcal{D}}^{(q-1)})$ が involution $(\neq 1) \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a_1, \cdots, a_\ell \text{ は } \geqq 0 \text{ なる整数で} \\ a_1m_1 + \cdots + a_\ell m_\ell \leqslant 2 \\ a_1, \cdots, a_\ell \text{ の少くとも一つは奇数} \end{cases}$$

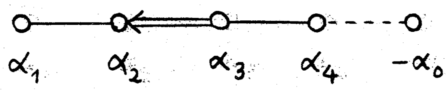
例1. $\mathfrak{g} = (G_2)$ 

$\alpha_0 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$

$\lambda = \frac{q-1}{2}\varepsilon_2$ のみ

$\Omega^{(q-1)} = 1$ 故, $W_{\chi_\lambda} = (W_{\chi_\lambda})_0 = \langle w_{\alpha_0}, w_{\alpha_1} \rangle$

Δ_{χ_λ} の Dynkin 図形は

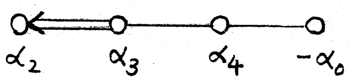
例2. $\mathfrak{g} = (F_4)$ 

$$\alpha_0 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$$

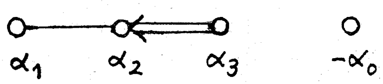
$\mathfrak{g}$ 中の involution を与えるのは,

$$\lambda_1 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_1 \quad \text{および} \quad \lambda_4 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_4$$

である。 $\Omega^{(q-1)} = 1$ 故, $W_{\chi_\lambda} = (W_{\chi_\lambda})_0$ であるが, $\Delta_{\chi_{\lambda_1}}$, $\Delta_{\chi_{\lambda_4}}$ の Dynkin 図形は次の通り:

$\Delta_{\chi_{\lambda_1}}$ 

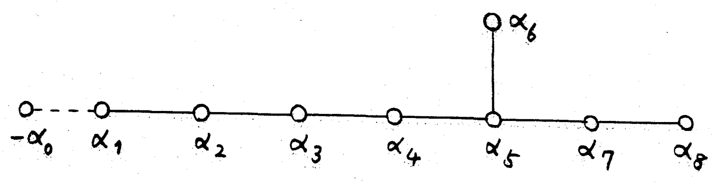
(B_4)型

$\Delta_{\chi_{\lambda_4}}$ 

$(C_3) \times (A_1)$型

よって, $\chi_{\lambda_1} \underset{W}{\sim} \chi_{\lambda_2}$ ではない。従って $\mathfrak{h}(\chi_{\lambda_1})$, $\mathfrak{h}(\chi_{\lambda_2})$ は共役ではない。

例3. $\mathfrak{g} = (E_8)$



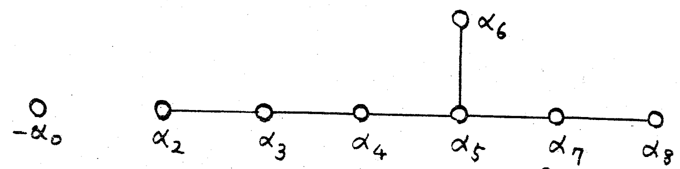
$$\alpha_0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 3\alpha_6 + 4\alpha_7 + 2\alpha_8$$

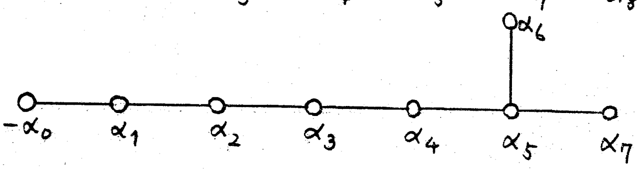
$$\Omega^{(q-1)} = 1 .$$

$\mathfrak{k}$ 中の involution を与えるのは、

$$\lambda_1 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_1 \quad \text{および} \quad \lambda_8 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_8$$

である。$\Delta\chi_{\lambda_1}$, $\Delta\chi_{\lambda_8}$ の Dynkin 図形は次の通り：

$\Delta\chi_{\lambda_1}$  $(A_1)\times(E_7)$型

$\Delta\chi_{\lambda_8}$  (D_8)型

よって、$\chi_{\lambda_1} \underset{W}{\not\sim} \chi_{\lambda_2}$ である.

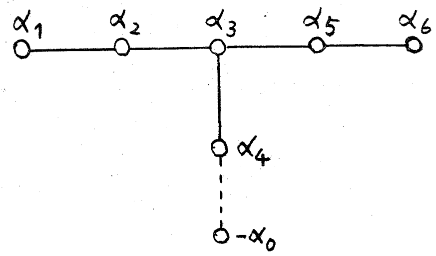
(2°) [補題] (i) $w_\Pi(\alpha_i) = -\alpha_j$ なら $w_\Pi(\varepsilon_i) = -\varepsilon_j$

(ii) $(\alpha_0, \varepsilon_i) = m_i = 1$ ならば

$$\begin{cases} j \neq i \text{ の時} & w_{\Pi_i}(\varepsilon_j) = m_j\varepsilon_i - \varepsilon_k \quad (\text{ただし } w_{\Pi_i}(\alpha_j) = -\alpha_k \text{ とする}) \\ j = i \text{ の時} & w_{\Pi_i}(\varepsilon_i) = \varepsilon_i \end{cases}$$

証明. 容易であるから省略.

例4. $\mathfrak{g} = (E_6)$.



$$\alpha_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$$

$$\Omega^{(q-1)} \cong \mathbb{Z}_3 \ ; \quad \Omega^{(q-1)} = \langle \rho \rangle , \quad \rho = T((q-1)\varepsilon_1) w_{\Pi_1} w_{\Pi}$$

$\mathfrak{g}$ 中の involution $h(\chi_\lambda)$ を与える $\lambda \in \bar{\mathcal{D}}^{(q-1)}$ は

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{q-1}{2}\varepsilon_1 , \quad \lambda_6 = \dfrac{q-1}{2}\varepsilon_6 \\ \lambda_{1,6} = \dfrac{q-1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_6) \\ \lambda_2 = \dfrac{q-1}{2}\varepsilon_2 , \quad \lambda_4 = \dfrac{q-1}{2}\varepsilon_4 , \quad \lambda_5 = \dfrac{q-1}{2}\varepsilon_5 \end{cases}$$

の6個であるが，これらは $\Omega^{(q-1)}$ の下で次のように移り合っている（上の補題参照）

$$\rho(\lambda_1) = \lambda_{1,6} , \quad \rho(\lambda_{1,6}) = \lambda_6 , \quad \rho(\lambda_6) = \lambda_1$$
$$\rho(\lambda_2) = \lambda_5 , \quad \rho(\lambda_5) = \lambda_4 , \quad \rho(\lambda_4) = \lambda_2 .$$

従って，どの λ_i , $\lambda_{i,j}$ に対しても，

$$\Omega^{(q-1)}_{\lambda_i} = 1 , \quad \Omega^{(q-1)}_{\lambda_{i,j}} = 1$$

である。よって

$$W_{\chi_{\lambda_i}} = (W_{\chi_{\lambda_i}})_0 \quad , \quad W_{\chi_{\lambda_{i,j}}} = (W_{\chi_{\lambda_{i,j}}})_0$$

である。例1〜4をまとめると

定理 (R. Ree). $\mathfrak{g} = (G_2), (F_4), (E_6), (E_8)$ ならば, G の任意の involution は, $\mathfrak{h}$ 中の involution に共役である。involution ($\neq 1$) の共役類の個数は次の通り.

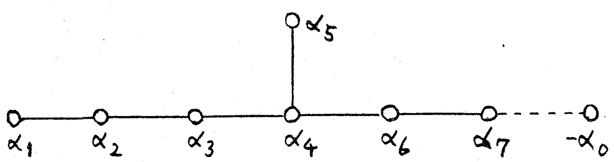
型	(G_2)	(F_4)	(E_6)	(E_8)
個数	1	2	2	2

注意. $(G_2), (F_4), (E_6), (E_8)$ に対しては, G の代りに G' をとってもよい。何故なら, $(G_2), (F_4), (E_8)$ に対しては $G = G'$ である。また (E_6) の時は,

$$[G : G'] = (3, q-1) = 1 \text{ or } 3$$

であるから, G の involution は凡て G' 中にある。

例5. $\mathfrak{g} = (E_7)$ (Ree の原論文には計算違いがある)



$$\alpha_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7$$

$$\Omega^{(q-1)} \cong \mathbb{Z}_2 \ , \ \Omega^{(q-1)} = \langle \rho \rangle , \quad \rho = T((q-1)\varepsilon_1) w_{\pi_1} w_{\pi}$$

$\mathfrak{h}$ 中の involution $h(\chi_\lambda)$ を与える $\lambda \in \overline{\mathfrak{D}}^{(q-1)}$ は

$$\lambda_1 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_1, \quad \lambda_5 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_5, \quad \lambda_2 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_2$$

$$\lambda_7 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_7$$

の4個である。之等は $\Omega^{(q-1)}$ の下で次のように移り合う.

$$\rho(\lambda_1) = \lambda_1, \quad \rho(\lambda_5) = \lambda_5, \quad \rho(\lambda_2) = \lambda_7, \quad \rho(\lambda_7) = \lambda_2.$$

従って,

$$|\Omega^{(q-1)}_{\lambda_1}| = |\Omega^{(q-1)}_{\lambda_5}| = 2, \quad |\Omega^{(q-1)}_{\lambda_2}| = |\Omega^{(q-1)}_{\lambda_7}| = 1.$$

である. この場合には, 始めて, $\mathfrak{h}_J$ の元に共役でない involution の存在が可能となる. 実際, $h(\chi_{\lambda_1})$, $h(\chi_{\lambda_5})$ に直せるのは, k の拡大体を要するような involution $h^*(\chi_{\lambda_1})$, $h^*(\chi_{\lambda_5})$ が生ずる. (Ree の原論文参照) よって, G の involution は5個の共役類をなす. G' の方は更にむずかしく, $q \equiv 1 \pmod{4}$ なら, Ree の原論文にあるように, 3個の共役類をもつが, $q \equiv 3 \pmod{4}$ の時は, G' 中の involution の共役類の個数 ν は $1 \leq \nu \leq 3$ であることしか判らない. (シンポジウムの時, 筆者が $\nu = 1$ であると発言しましたが, その後証明に gap が見付かったので, 取り消します.)

§7. centralizer の order

(1°) $\chi \in \mathrm{Hom}(P_0, k^*)$ に対して, disjoint union

$$C_G(h(\chi)) = \bigcup_{w \in W_\chi} \mathfrak{U}' \mathfrak{h}_J\, s(w) (\mathfrak{U}' \cap \mathfrak{U}_w)$$

(ただし $\mathfrak{U}'=\langle \mathfrak{X}_\alpha ; \alpha\in\Delta^+\cap\Delta_\chi\rangle$) を用いて，中心化群 $C_G(h(\chi))$ の位数が，Chevalley 群の時と同様に計算される．いま，

$$C_G(h(\chi))_0 = \langle \mathfrak{X}_\alpha ; \alpha\in\Delta_\chi\rangle\cdot \mathfrak{H}$$

とおくと，Chevalley 群の時の Bruhat 分解の証明と同じ論法によって，disjoint union

$$C_G(h(\chi))_0 = \bigcup_{w\in(W_\chi)_0} \mathfrak{U}'\mathfrak{H}\, s(w)\,(\mathfrak{U}'\cap\mathfrak{U}_w)$$

を得る．そして，ルート系 Δ_χ の Dynkin 図形の exponent を $\nu_1,\ldots,\nu_{\ell^*}$ とすると，

$$|C_G(h(\chi))_0| = q^{|\Delta^+\cap\Delta_\chi|}\cdot\prod_{i=1}^{\ell^*}(q^{\nu_i+1}-1)\cdot(q-1)^{\ell-\ell^*}$$

となる．さて茲で，

$$w\in W_\chi \Longrightarrow w(\Delta_\chi)=\Delta_\chi$$

に注意すれば，

$$W_\chi \triangleright (W_\chi)_0$$

がわかる。しかも，$C_G(h(\chi))=\langle C_G(h(\chi))_0,\ s(w) ; w\in W_\chi\rangle$ であるから，

$$C_G(h(\chi)) \triangleright C_G(h(\chi))_0$$

となる。そして

$$C_G(h(\chi))/C_G(h(\chi))_0 \cong W_\chi/(W_\chi)_0$$

$\mathfrak{g}_i$

を得る．特に，k として universal domain Ω をとれば，$C_{G_\Omega}(h(\chi))_0$ は，$C_{G_\Omega}(h(\chi))$ の中の連結代数群で，かつ有限指数であるから，実は $C_{G_\Omega}(h(\chi))$ の単位元の連結成分と一致する．よって，§4，(5°) よりも精密に

$$C_{G_\Omega}(h(\chi)) \text{ が連結代数群} \iff W_\chi = (W_\chi)_0$$

を得る．しかも

$$[C_G(h(\chi)) : C_G(h(\chi))_0] = [W_\chi : (W_\chi)_0]$$

から，$C_G(h(\chi))$ の位数が判る．

注意．Δ_χ は，reductive な代数群 $C_{G_\Omega}(h(\chi))_0$ の半単純部分のルート系である．

以下結果を表示する．

$\mathfrak{g}$ の型	λ	Δ_χ の Dynkin 図形	$\lvert C_G(h(\chi_\lambda))\rvert$	G の 2-Sylow 群の包含性
(G_2)	$\lambda_1 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_1$	$(A_1)\times(A_1)$	$q^2(q^2-1)^2$	yes
(F_4)	$\lambda_1 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_1$	(B_4)	$q^{16}(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)(q^8-1)$	yes
	$\lambda_4 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_4$	$(C_3)\times(A_1)$	$q^{10}(q^2-1)^2(q^4-1)(q^6-1)$	no
(E_8)	$\lambda_1 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_1$	$(A_1)\times(E_7)$	$q^{64}(q^2-1)^2(q^6-1)(q^8-1)$ $\times(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)$	no
	$\lambda_8 = \frac{q-1}{2}\varepsilon_8$	(D_8)	$q^{56}(q^8-1)\prod_{i=1}^{7}(q^{2i}-1)$	yes

(E_6)	$\lambda_1=\frac{q-1}{2}\varepsilon_1$	(D_5)	$q^{20}(q-1)(q^2-1)(q^4-1)$ $\times(q^6-1)(q^8-1)(q^5-1)$	yes
	$\lambda_2=\frac{q-1}{2}\varepsilon_2$	$(A_1)\times(A_5)$	$q^{16}(q^2-1)^2(q^3-1)(q^4-1)$ $\times(q^5-1)(q^6-1)$	no
(E_7)	$\lambda_2=\frac{q-1}{2}\varepsilon_2$	$(A_1)\times(D_6)$	$q^{31}(q^2-1)^2(q^4-1)$ $\times(q^6-1)^2(q^8-1)(q^{10}-1)$	yes
	$\lambda_1=\frac{q-1}{2}\varepsilon_1$	(E_6)	$2q^{36}(q-1)(q^2-1)(q^5-1)$ $\times(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)$	no
	$\lambda_5=\frac{q-1}{2}\varepsilon_5$	(A_7)	$2q^{28}\prod_{i=2}^{8}(q^i-1)$	no

(E_7) には尚，k の拡大体において $h(\chi_{\lambda_1})$, $h(\chi_{\lambda_5})$ に共役になるような involution $h^*(\chi_{\lambda_1})$, $h^*(\chi_{\lambda_5})$ がある．その中心化群の位数はそれぞれ $h(\chi_{\lambda_1})$, $h(\chi_{\lambda_5})$ の中心化群の位数と一致する．

§8. centralizer の構造

大ざっぱには §7 に述べたように，半単純部分のルート系が Δ_χ である reductive な代数群の k 上の有理点よりなる群が $C_G(h(\chi))$ であるが，もっと精密なことは case by case で調べるしかないようである。Ree の原論文でも凡ての場合が十分明らかにされてはいない。

しかし例えば (G_2) の時は完全に与えられている（Ree の原論文参照）．このときは，$C_G(h(\chi))$ は次のようになる．

まず $SL(2, \mathbb{F}_q)$ 2つの central product

$$\begin{cases} P = (\mathcal{L} \times \mathcal{L}) / \langle (Z, Z) \rangle \\ \text{ただし } \mathcal{L} = SL(2, \mathbb{F}_q), \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

を考え，P をある involutive automorphism で拡大したものが $C_G(h(\chi))$ と同型となる．

参考文献

[1] C.Chevalley, Sur certains groupes simples, Tohoku Math. J., vol.7, 1955, pp.14-66.

[2] N.Iwahori and H.Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups, I.H.E.S. Publications mathématiques, n°25, 1965, pp.5-48.